

Barem de corectare CMAA 2026 Clasa a XI-a - Tehnologic

P1-problemă practică formulată pe baza S4 pagina 63 (manual clasa a XI-a-Tehnologic)

a) A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ m+1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$	5p
$\Leftrightarrow -m^2 + 3m - 2 = 0$	3p
$\Rightarrow m = 1$ sau $m = 2$	2p
b) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \Delta $, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ m+1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\Delta = -m^2 + 3m - 2 \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} -m^2 + 3m - 2 = 1 \Leftrightarrow -m^2 + 3m - 2 = 2$	5p
Caz I: $-m^2 + 3m - 2 = 2 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 4 = 0$ pentru care $\Delta < 0$ deci ecuația nu are soluții reale	3p
Caz II: $-m^2 + 3m - 2 = -2 \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m = 0$ sau $m = 3$	2p

P2

a) $B = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \Rightarrow B^{2026} = O_2$	5p
$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 4I_2 + 4B = 4(I_2 + B) \Rightarrow B^{2026} + A^2 = 4(I_2 + B)$	5p
b) Verificare $n=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ adevărat Etapa de demonstrație: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ $P(k): A^k = \begin{pmatrix} 2^k & k \cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$ adevărată pentru orice $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$	5p
$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 2^k & k \cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & (k+1) \cdot 2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} = A^{k+1}$, deci $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ adevărat pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$	5p
Cum $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \Rightarrow$ pentru $n = 2026$ obținem $A^{2026} = \begin{pmatrix} 2^{2026} & 2026 \cdot 2^{2025} \\ 0 & 2^{2026} \end{pmatrix}$	5p

P3

a) Funcția f are limită în $x = 1$ dacă $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \sqrt{4-3a}; \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \frac{4-a}{3}$	5p
$\sqrt{4-3a} = \frac{4-a}{3} \Leftrightarrow a^2 + 19a - 20 = 0$	3p
Se obține $a = 1$ sau $a = -20$ care convin	2p
b) Asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y = mx + n$ $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}; n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{3x} - \frac{x}{3} \right) = 1$ Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f este: $y = \frac{1}{3}x + 1$	6p
Panta asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f este $m_1 = m = \frac{1}{3}$	2p

Panta dreptei $x - 3y = -2026$ este $m_2 = \frac{1}{3}$	
Deci $m_1 = m_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$ cele două drepte sunt paralele	2p

P4 GM. Nr. 5 din 2020

<p>a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{x^2}{4x^2} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$</p>	5p
$4g(2x) - g(x) = 4 \cdot \frac{2x - \sin 2x}{8x^3} - \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{2 \sin x - \sin 2x}{2x^3} =$	4p
$= \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x}{2x^3} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3} = f(x) \cdot \frac{\sin x}{x}$	6p
<p>b) Notăm $l = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. Dacă l este limită finită $\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} g(2x)$ Trecând la limită în relația demonstrată la punctul a) obținem</p>	8p
$4l - l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{a)}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	
$\Rightarrow 3l = \frac{1}{2} \Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{6}$	2p